Capítulo 4

Funções de duas variáveis

4.1 Funções de varias variáveis - Definição e exemplos

Definição 1: Chamamos de função real com n variáveis a uma função do tipo

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ com } D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times R.$$

Ou seja, uma função cujo domínio D (ou $D(f)$) é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seu contra-domínio é $\mathbb{R}$.

Exemplo:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to R,\ (x, y) \mapsto 2x + 3y$

   $D = \mathbb{R}$, é uma função real de duas variáveis (é também uma função linear).

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y + z$

   $D = \mathbb{R}^3$, é uma função real de três variáveis (é também uma função polinomial)

3. $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$

   $D = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é uma função real de três variáveis (é também uma função racional, isto é, quociente de duas funções polinomiais).

Usamos, também, a notação (mais resumida) para representar funções reais de n variáveis;

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

Neste caso $D(f)$ é o conjunto $D(f) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}\}$

4.2 Domínio - Representação Gráfica

Exemplo : Determine e represente geometricamente os domínios das funções

Representação gráfica

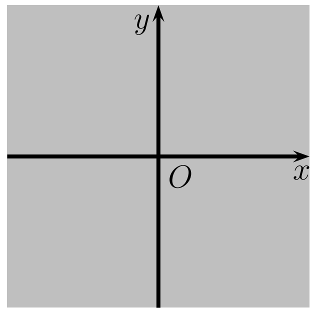


Figura 1

1. $f(x, y) = 3x^2 + 1$

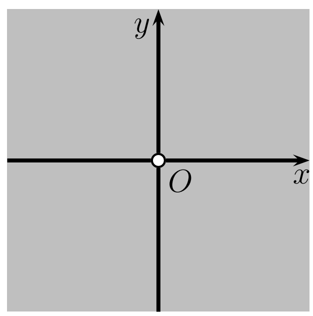
   $D(f) = \mathbb{R}^2$

2. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$

   $x^2 + y^2 + 1 = 0$, não tem solução, logo $D(f) = \mathbb{R}^2$.

   Representação gráfica: Figura 1

Representação gráfica



3. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + y}{x^2 + y^2}$

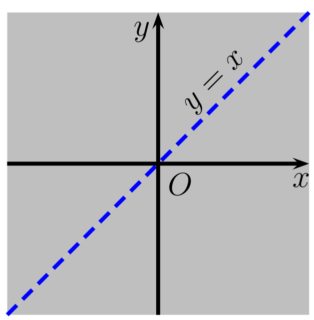
   $x^2 + y^2 = 0$. Como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$ então

   $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ e $y^2 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$.

   Logo $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Representação gráfica



4. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x - y}$

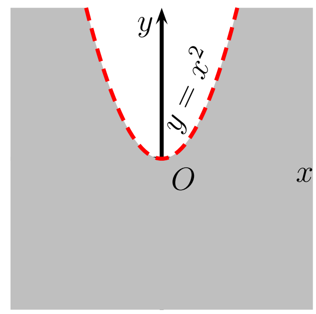
   $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \neq 0\}$,

   ou seja, todo o plano exceto a 1ª bissetriz.

5. $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{\sqrt{x^2-y}}$

   $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y\}$

Representação gráfica



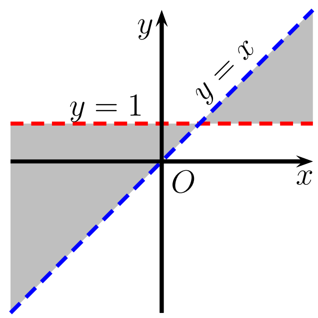
6. $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x-y}{y-1}\right)$

   $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \dfrac{x-y}{y-1} > 0\right\}$

   equivalente a $x - y > 0$ e $y - 1 > 0$

   ou $x - y < 0$ ou $y - 1 < 0$.

Representação gráfica



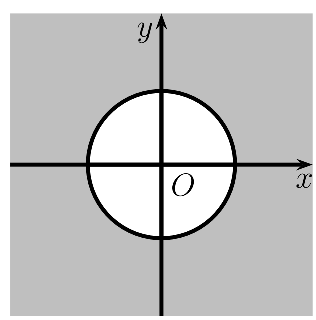
7. $f(x,y) = \operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$

   $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq -1 \text{ ou } x^2+y^2 \geq 1\}$,

   ou melhor, como $x^2+y^2 \leq -1$ não ocorre para nenhum $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \geq 1\}$.

Representação gráfica

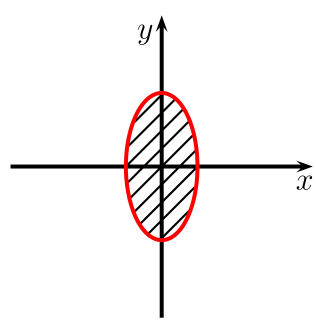


8. $f(x,y) = \arccos\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4}\right)$

   $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\}$, ou melhor, como $-1 \leq x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

   $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\}$

Representação gráfica



4.3 Construção de gráficos e curvas de nível

Gráfico

Definição: Dado uma função $f : D \to B$ seu gráfico é o conjunto $\{(a, f(a); a \in D\}$.

No caso de funções reais de uma variável temos:

$f : D \to \mathbb{R};\ D \subset \mathbb{R}$ seu gráfico é uma curva do $\mathbb{R}^2$.

Para uma função de duas variáveis

$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$

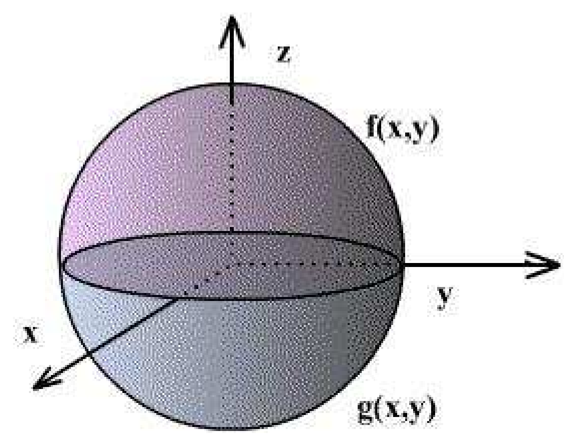
$(x, y) \to f(x, y)$

O gráfico da função f é uma **superfície** de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo: A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ que não é gráfico de função $z = f(x, y)$.

Da equação da esfera tem-se,

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



Sejam as funções $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$D(f) = D(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

(O círculo $x^2 + y^2 = 1$ e seu interior)

O gráfico de f é a semi-esfera superior $(z \geq 0)$ e o gráfico de g é a semi-esfera inferior $(z \leq 0)$.

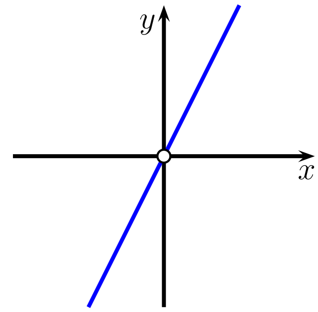
Curvas de nível

Um recurso auxiliar para esboçar gráficos são as curvas de nível da função.

Definição: Dados uma função $z = f(x, y)$ e $k \in \mathbb{R}$, a curva de nível de f em $z = k$ é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = k\}$. Ou seja, é o conjunto dos elementos do domínio de f que possuem imagens igual a k. É também a intersecção do gráfico de f com o plano (paralelo a XOY) de equação $z = k$

Exemplo 1: Determine e esboce a curva de nível de $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ em $z = 2$.

Representação gráfica



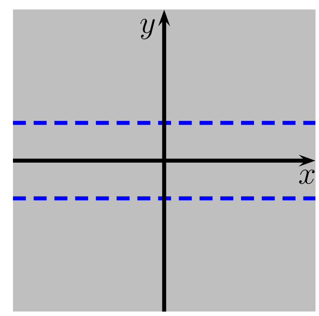
A curva de nível é o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a $2 = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = 2x$ com $x \neq 0$. Ou seja, trata-se da reta de equação $y = 2x$ exceto o ponto $(0,0)$

Exemplo 2: Dada a função

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2 - 1}$$

determine e represente seu domínio e as suas curvas de nível.

Representação gráfica



$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq -1 \text{ e } y \neq 1\}$ (ou seja, todo o plano exceto as retas $y = 1$ e $y = -1$).

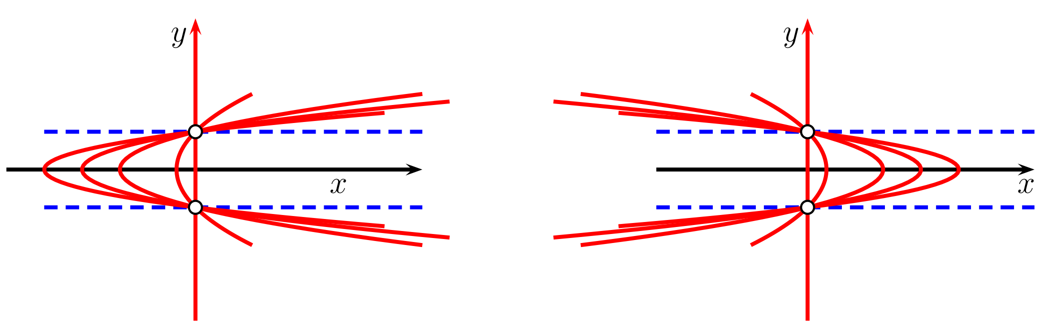
Curvas de nível

Seja a equação $\dfrac{x}{y^2 - 1} = k$ que é equivalente a $x = k(y^2 - 1)$ com $y \neq 1$ e $y \neq -1$.

Para $k \neq 0$, temos a parábola $x = k(y^2 - 1)$ com exceção dos pontos $(0,-1)$ e $(0,1)$

Para $k = 0$ temos $x = 0$ com $y \neq 1$ e $y \neq -1$, ou seja, o eixo OY exceto os pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$.

Representação gráfica



$k \geq 0$ $\qquad$ $k < 0$

Exemplo 3:

I) Determine e represente graficamente.

i) Domínio de f.

ii) Curvas de nível.

iii) Interseções com os planos coordenados.

II) Esboce o gráfico de f usando os itens de I).

Exemplo 3.1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

Representação gráfica

i) $D(f) = \mathbb{R}^2$

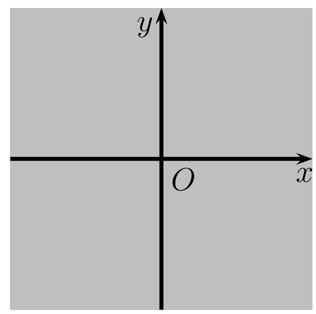


Figura 1

ii) Curvas de nível

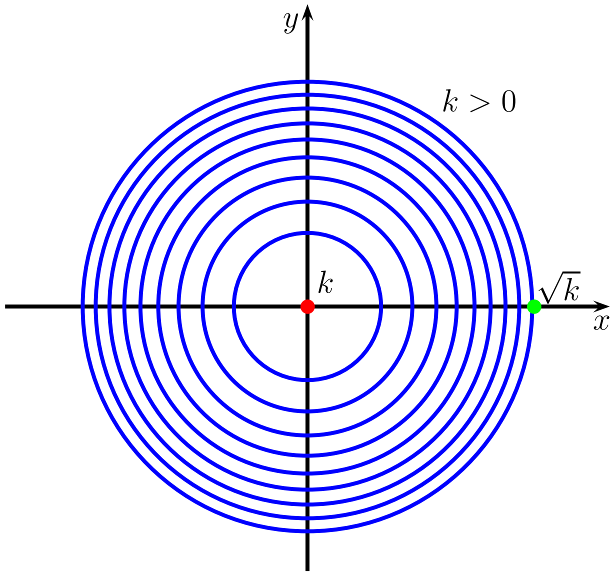
Seja a equação $x^2 + y^2 = k$. Como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$ então

- se $k < 0$ a equação não tem solução. Ou seja, para qualquer $k < 0$ (abaixo do plano XOY) a curva de nível correspondente é o $\emptyset$.
- Fazendo $k = 0$ (intersecção com o plano XOY), a equação $x^2 + y^2 = 0$ tem solução $x = 0$ e $y = 0$. A curva de nível em $z = 0$ é $(0,0)$.
- Fazendo $k > 0$, a equação $x^2 + y^2 = k$ pode ser escrita como

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{k})^2$$

Portanto para qualquer $k > 0$ a curva de nível correspondente é um círculo de raio $\sqrt{k}$ e centro na origem do $\mathbb{R}^2$.

Representação gráfica das curvas de nível



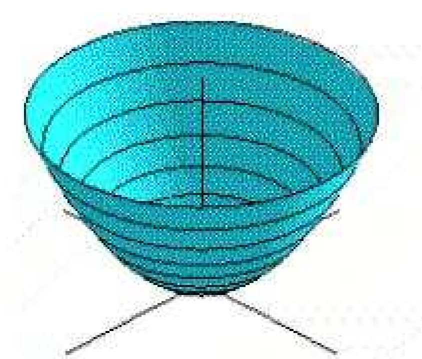
Como todas as curvas de nível são círculos com centros em $(0,0)$ concluímos que o gráfico de $f(x,y)$ é uma superfície de revolução em torno de OZ.

iii) Interseções com os planos coordenados.

- $\bigcap XOY$: Já foi obtido, corresponde à curva no nível $z = 0$.
- $\bigcap XOZ$: Fazendo $y = 0$ na equação $z = x^2 + y^2$. obtém-se $z = x^2$, equação de uma parábola
- $\bigcap YOZ$: Fazendo $x = 0$ na equação $z = x^2 + y^2$. obtém-se $z = y^2$, a parábola obtida em XOZ.

Concluímos que o gráfico é um parabolóide de revolução

II) Gráfico de f



Exemplo 1.2 $f(x,y) = 1 - y^2$

i) $D(f) = \mathbb{R}^2$

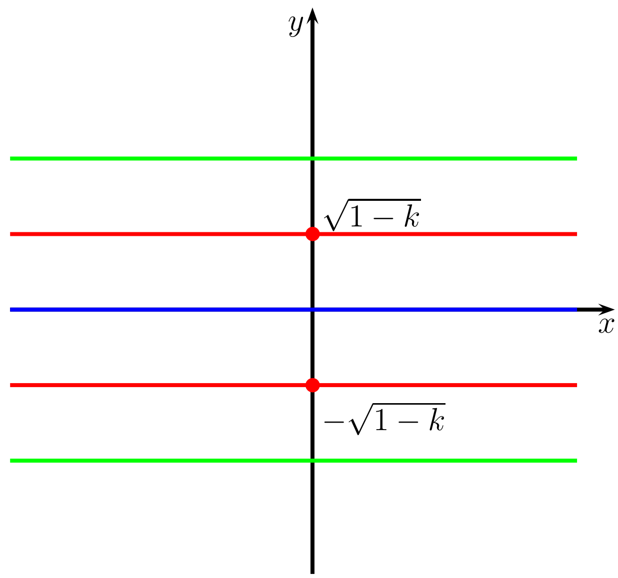
Representação gráfica de $D(f)$: Figura 1

ii) Curvas de nível

Seja a equação $1 - y^2 = k$. Extraindo o valor de y temos $y = \pm\sqrt{1-k}$

- Logo, para $k > 1$ (isto é, $1 - k < 0$) a curva de nível correspondente é o vazio.
- Para $k = 1$ temos $y = 0$ e x é qualquer. Então a curva de nível é o eixo OX.
- Para $k < 1, y$ assume os dois valores de $(*)$ e x é qualquer. Então a curva de nível é constituída das duas retas paralelas a OX, $y = -\sqrt{1-k}$ e $y = \sqrt{1-k}$.

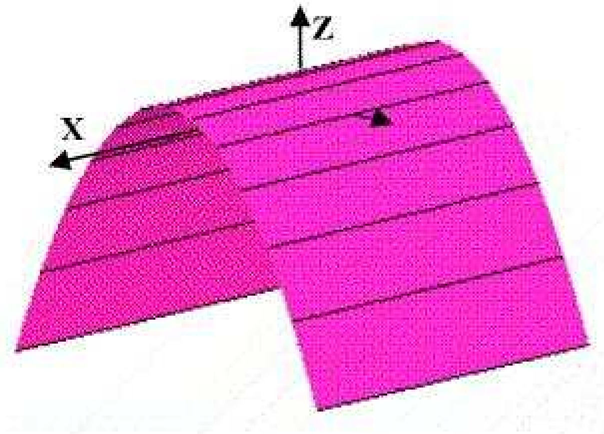
Representação gráfica das curvas de nível



iii) Intersecções com os eixos coordenados

- $\bigcap XOY : z = 0 \Rightarrow 1 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$. Ou seja, as duas retas $y = 1$ e $y = -1$.
- $\bigcap XOZ : y = 0 \Rightarrow 1 - 0^2 = z \Rightarrow z = 1$. Ou seja, a reta $z = 1$.
- $\bigcap YOZ : x = 0 \Rightarrow 1 - y^2 = z$. Neste caso, no plano YOZ, temos uma parábola.

II) Gráfico: Trata-se de uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo OX tal que a parábola do plano YOZ de equação $z = 1 - y^2$ é uma diretriz (é o que acontece com funções que independem de uma das variáveis x ou y)



Exemplo 1.3 $f(x,y) = y^2 - x^2$

i) $D(f) = \mathbb{R}^2$

Representação gráfica : Figura 1

ii) Curvas de nível

Seja a equação $y^2 - x^2 = k.(*)$

– Se $k = 0$, temos $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ ou $x = -y$, ou seja, as retas 1ª e 2ª bissetrizes.

– Se $k > 0$, podemos escrever a equação $(*)$ como

$$\frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} = 1$$

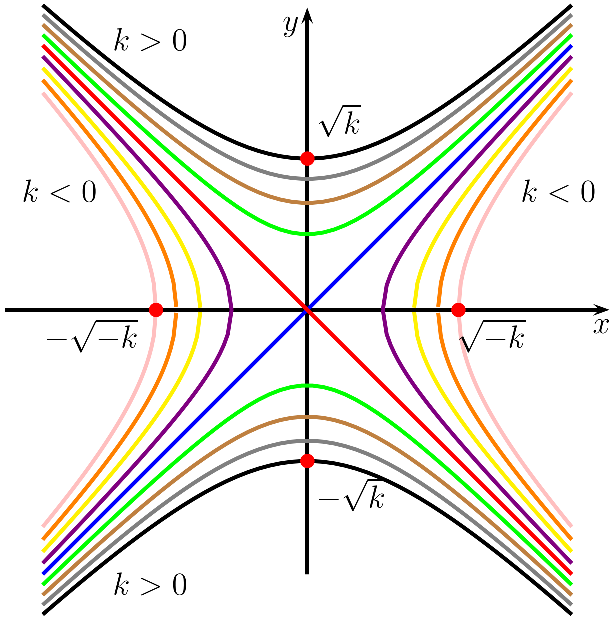
Neste caso temos uma hipérbole com focos sobre o eixo OY

– Se $k < 0$ então $-k > 0$, podemos escrever a equação $(*)$ como

$$\frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1$$

Neste caso temos também uma hipérbole com focos sobre o eixo OX

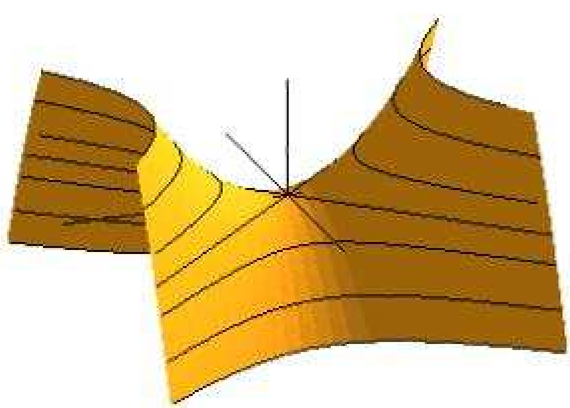
Representação gráfica das curvas de nível



iii) Intersecções com os planos coordenados

- $\bigcap XOY$: Já foi obtido, corresponde à curva no nível $z = 0$.
- $\bigcap XOZ$: Fazendo $y = 0$ na equação $z = y^2 - x^2$. obtém-se $z = -x^2$, equação de uma parábola
- $\bigcap YOZ$: Fazendo $x = 0$ na equação $z = y^2 - x^2$. obtém-se $z = y^2$, equação de uma parábola

II) Gráfico: Trata-se do parabolóide hiperbólico



Exemplo 1. 4 $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right)$

i) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Representação gráfica

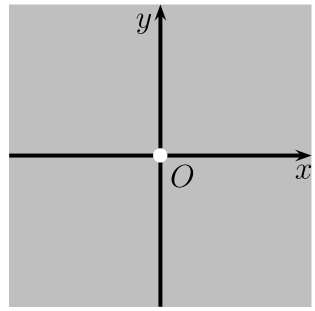


Figura 1

ii) Curvas de nível

Seja a equação

$$\ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = e^k$$

Como e^k é maior que zero para todo k, então a curva de nível em $z = k$ é a elipse de equação

$$\frac{x^2}{(3e^{k/2})^2} + \frac{y^2}{(e^{k/2})^2} = 1$$

cujo semi-eixo no eixo OX é sempre três vezes maior que e o semi-eixo no eixo OY.

Representação gráfica

(Ou seja, "quase"uma superfície de revolução)

iii) Intersecções com os planos coordenados

– $\bigcap XOY$: Significa a curva de nível em $z = 0$, ou seja a elipse de equação

$$\frac{x^2}{(3)^2} + y^2 = 1$$

Representação gráfica: Veja figura anterior

– $\bigcap XOZ$: Fazendo $y = 0$ na equação $z = \ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) = 1$

obtém-se $z = \ln\left(\frac{x^2}{9}\right) = 2\ln|x| - \ln 9$

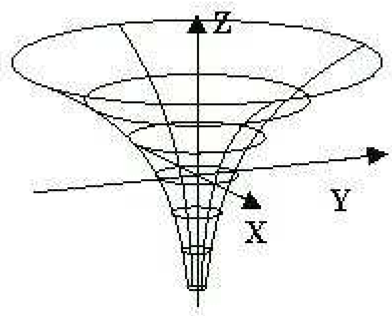
Representação gráfica

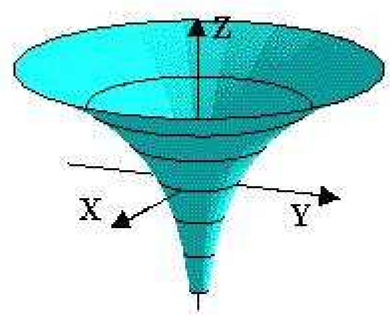
– $\bigcap YOZ$: Fazendo $x = 0$ na equação $z = \ln\left(\frac{x^2}{9} + y^2\right) = 1$

obtém-se $z = \ln(y^2) = 2\ln|y|$

Representação gráfica

II) Gráfico





OBS: Dada a função $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ a superfície de nível de f em $z = k$ é definida de modo análogo às curvas de nível para $n = 2$.

Exemplo : Determine e represente graficamente as superfícies de nível da função

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Seja a equação

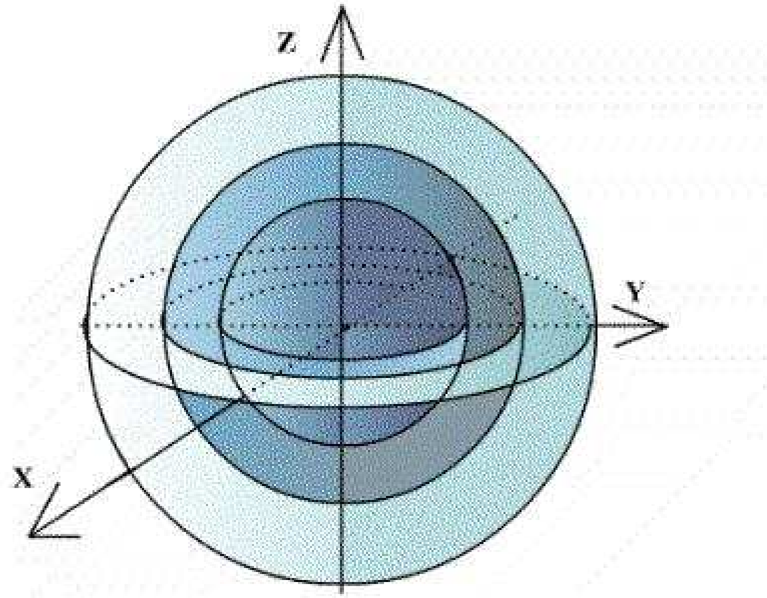
$x^2 + y^2 + z^2 = k$

- Se $k > 0$ então temos
$$x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{k})^2$$
a equação de uma esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.

- Se $k = 0$ então temos o ponto $(0, 0, 0)$.

- Para Se $k < 0$ a superfície de nível é o vazio.

Representação gráfica das superfícies de nível



4.3.1 Exercícios

[1] Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o graficamente:

(1.1) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-1} + \sqrt{y-x^2}$ (1.2) $f(x,y) = \sqrt{y^2-4}\,\ln\,(x-y)$

(1.3) $f(x,y) = \ln\,(x^2-y^2)$ (1.4) $f(x,y) = \ln\left[\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\right]$

(1.5) $f(x,y) = \arccos(x-y)$ (1.6) $f(x,y) = \operatorname{arcsec}\Big(\dfrac{x^2}{4}+y^2\Big)$

[2] Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

(2.1) $f(x,y) = 16-x^2-y^2$ (2.2) $f(x,y) = 9x^2+4y^2$

(2.3) $f(x,y) = x^2$ (2.4) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$

(2.5) $f(x,y) = 8-2x-4y$ (2.6) $f(x,y) = \dfrac{4}{x^2+4y^2}$

(2.7) $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$

[3] Descreva as curvas/superfícies de nível da cada função:

(3.1) $f(x,y) = e^{-4x^2-y^2}$ (3.2) $F(x,y,z) = 2x+3y+6z$

(3.3) $F(x,y,z) = x^2-y^2+z^2$